Pell Denklemleri, Genelleştirilmiş Pell Denklemleri ve Pell Denklemlerinin Uygulamaları

SEFA ÇALIK
20025001
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Murat ALAN

Pell Denklemlerinin Tanımı ve Kısaca Tarihi

Tam kare olmayan d tamsayıları için $x^2-dy^2=1$ şeklindeki denklemlere Pell denklemleri denir. Denklemin pozitif tamsayı çözümleri incelenmektedir. Pell denklemleri, iki bin yılı aşkın zamandır ilgilenilen bir konu olmakla birlikte ilk olarak $x^2-2y^2=1$ denklemi üzerinde çalışıldığı düşünülmektedir. 1687 yılında Fermat, Avrupalı matematikçilerden d tam kare olmayan bir tamsayı olmak üzere dy^2+1 sayısı tam kare olacak şekilde y sayılarını bulmalarını, genel bir çözüm elde edilemezse $x^2=61y^2+1$ denklemini sağlayan en küçük y pozitif tamsayısını bulmalarını istemiştir. Bundan neredeyse yüz yıl sonra Euler genel çözümün $\sqrt{d}$ sayısının sürekli kesir açılımıyla bulunabildiğini büyük bir ölçüde göstermiş, yanlışlıkla John Pell'e atıfta bulunarak konunun isminin Pell denklemleri olmasına neden olmuştur. 1768 yılında Lagrange teoremin tamamını ispatlamıştır.

Sürekli Kesirler

$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ birer tamsayı ve $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pozitif olmak üzere yanda verilen ifadeye basit sürekli kesir denir. Bu sürekli kesir $[\alpha_0; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ ile gösterilirler.

$$\alpha_0+\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\ddots\, \alpha_{n-1}+\cfrac{1}{\alpha_n}}}}$$

Sürekli kesir açılımının α_k sayısında kesilmesiyle elde edilen sayı k. yakınsak adını alır ve C_k ile gösterilir. Bu yakınsaklar aşağıda verilen yolla bulunabilir:

$$p_0=\alpha_0 \qquad q_0=1$$
$$p_1=\alpha_0.\,\alpha_1+1 \qquad q_1=\alpha_1$$
$$p_k=\alpha_k\, p_{k-1}+p_{k-2} \qquad q_k=\alpha_k\, q_{k-1}+q_{k-2}$$

olmak üzere $C_k=\dfrac{p_k}{q_k}$ eşitliği geçerlidir.

İrrasyonel sayıların sürekli kesir açılımı sonsuzdur ve $[\alpha_0; \alpha_1, \alpha_2, \ldots]$ olarak gösterilir. Sonsuz sürekli kesirlerde terimler tekrar edebilir. Bu durumda açılım periyodik olur. $[\alpha_0; \overline{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}]$ olarak yazıldığında 1'den k'ya kadar olan terimler tekrar eder.

$\sqrt{2}=[1;\overline{2}]$ açılımı periyodiktir.
$\pi=[3;7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,\ldots]$ açılımı periyodik değildir.

Pell Denklemleri Çözümleri

d tam kare olmayan bir tamsayı olmak üzere $x^2-dy^2=\pm1$ denklemlerinin çözümleri sürekli kesir açılımları yardımıyla bulunur. n sayısı açılımın periyodu olmak üzere

- n tek ise $x^2-dy^2=1$ denkleminin pozitif tamsayı çözümleri
$x=p_{2kn-1}$ $y=q_{2kn-1}$ $k=1,2,3,\ldots$
- n tek $x^2-dy^2=-1$ denkleminin pozitif tamsayı çözümleri
$x=p_{(2k-1)n-1}$ $y=q_{(2k-1)n-1}$ $k=1,2,3,\ldots$
- n çift ise $x^2-dy^2=1$ denkleminin pozitif tamsayı çözümleri
$x=p_{kn-1}$ $y=q_{kn-1}$ $k=1,2,3,\ldots$ sayılarıdır.
- n çift ise $x^2-dy^2=-1$ denkleminin tamsayılarda çözümü yoktur.

$x^2-61y^2=1$ denkleminde $\sqrt{61}=[7;\overline{1,4,3,1,2,2,1,3,4,1,14}]$ açılımında $n=11$ olup pozitif tamsayılardaki en küçük çözüm $(x_1,y_1)=(p_{21},q_{21})=(1766319049,226153980)$ sayılarıdır.
$x^2-61y^2=-1$ için en küçük pozitif tamsayı çözümü $(x_1,y_1)=(p_{10},q_{10})=(29718,3805)$ sayılarıdır.

$x^2-dy^2=1$ denkleminin en küçük pozitif tamsayı çözümü (x_1,y_1) sayıları olmak üzere denklemin pozitif tamsayılardaki tüm çözümleri $x_k+y_k\sqrt{d}=(x_1+y_1\sqrt{d})^k$, $k=1,2,3,\ldots$ olacak şekilde (x_k,y_k) sayılarıdır.

Genelleştirilmiş Pell Denklemleri

d tam kare olmayan bir tamsayı olmak üzere $x^2-dy^2=n$ denklemine genelleştirilmiş Pell denklemi denir. Denklemin herhangi bir çözümü (x_0,y_0) ve $x^2-dy^2=1$ denkleminin bir çözümü (u,v) ikilisi olmak üzere $x_k+y_k\sqrt{d}=(x_k\pm y_k\sqrt{d})(u+v\sqrt{d})^k$ olacak şekilde (x_k,y_k) sayıları $x^2-dy^2=n$ denkleminin çözümüdür.

$x^2-dy^2=1$ denkleminin en küçük çözümü $s=u+v\sqrt{d}$ olmak üzere $|y_0|<\sqrt{\frac{|n|s}{d}}$ olacak şekilde kısıtlama yapılarak bulunan y_0 sayıları ve bunlara karşılık gelen x_0 sayılarıyla tüm farklı çözüm kümeleri bulunabilir. Böylece denklemin çözümü olan tüm (x_k,y_k) sayıları $x_k\pm y_k\sqrt{d}=(x_0+y_0\sqrt{d})(u\pm v\sqrt{d})^k$ sayılarıdır.

Pell Denklemi Çözümünde Rekürans Bağıntısı ve Pell Dizisi

$x^2-dy^2=1$ denkleminin en küçük pozitif çözümü (x_0,y_0) olmak üzere denklemin tüm çözümleri arasında $x_{n+2}=2x_0x_{n+1}-x_n$ ve $y_{n+2}=2x_0y_{n+1}-y_n$ ilişkisi vardır ve buna rekürans bağıntısı denir.

$x^2-2y^2=\pm1$ denkleminin çözümü olan pozitif y tamsayıları ve sıfır ile birlikte oluşturulan diziye Pell dizisi denir. Pell dizisinin elemanları P_i sayıları olmak üzere $P_{n+2}=2P_{n+1}+P_n$ kuralı vardır. Böylece dizi 0,1,2,5,12,29,70,169,408,985, ... sayılarından oluşur.

Pell Denklemlerinin Uygulamaları

- Ardışık üç tamsayının toplamı, ardışık iki tamsayının toplamı olacak şekilde tamsayılar nelerdir?
- $n+1$ ve $\frac{n}{2}+1$ birer tam kare olacak şekilde n sayıları nelerdir?
- $T_n=\frac{n(n+1)}{2}$ üçgensel sayı ve $S_n=n^2$ karesel sayı olmak üzere hem üçgensel hem karesel sayılar nelerdir?
- $x^2+y^2-1=4xy$ denkleminin tamsayı çözümleri nelerdir?
- $k<n$ olmak üzere k ve n doğal sayıları için $\binom{n}{k-1}=2\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$ olacak şekilde tüm n sayılarını nelerdir?
- x ve y birer tamsayı olmak üzere $n^2=\frac{x^2+1}{y^2}+4$ olacak şekilde n tamsayıları nelerdir?

Yukarıdaki soruların çözümleri Pell denklemleri yardımıyla gösterilmiştir.

Her $t=0,1,2,\ldots$ parametresine göre $x^2-5y^2=-11^t$ denklemi incelenip genel çözüm elde edilmiştir.

Kaynaklar

- Burton, D.M., "Elementary Number Theory", 7.Baskı,McGraw-Hill, New York, 2009
- Rosen, K.H., "Elementary Number Theory and Its Applications", 2.Baskı, Addison-Wesley, California, 1988
- https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/ugradnumthy/pelleqn2.pdf
- https://refkol.ro/matek/mathbooks/Files/Pell-IMO.pdf